E-ISSN: 2997-9439

SemantJournals

American Journal of Education and Evaluation Studies
https://semantjournals.org/index.php/ AJEES

| Research Article

Check for updates

Shartli Ehtimollar Va Matematik Kutilmalar

To'raxonov Islombek Farxod o'g'li, Qurbanov Kamron Sanjar o'g'li,
Axmedov Ilyosbek Odilbek o'g'li
Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya: Shartli ehtimol, To'la ehtimol, Bayes formulasi, Tasodifiy miqdorlar, Matematik kutilma va Dispersiya xossalaridan foydalanilgan.

Kalit so'zlar: Shartli ehtimol, To'la ehtimol, Bayes formulasi Ba'zi muhim taqsimotlar va shartli taqsimotlar.

Bu maqolada biz Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi, Shartli ehtimol, To'la ehtimol, Bayes formulasi, Tasodifiy miqdorlar, Matematik kutilma va Dispersiya, Ba'zi muhim taqsimotlar va shartli taqsimotlardan ma'lumotlarga ega bo'lishimiz kerak.

Quyida keltirilgan masalalar keltirilgan bakalavr ta'lim yo'nalishi talabalari o'rganishi uchun qulay holda keltirilgan. Berilgan masalalar ko'plab darliklarda qiyinlik tug'diruvchi masalalar yechib ko'rsatilgan.

№ 1. x va n tasodifiy miqdorlarga misol keltiring ular o'zaro bog'lanmagan bo'lbsin va ular uchun $E(x|h) = Ex$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Yechish: Biz elementar hodisalar fazosini W= $\{w_1, w_2, w_3\}$, $P(w_1) = P(w_2) = \frac{1}{4}, P(w_3) = \frac{1}{2}$.

Biz tasodifiy o'zgaruvchilarni nuqtama- nuqta aniqlaymiz. $x(w_1) = 1,\ x(w_2) = -1,$

$x(w_3) = 0;$

$h(w_1) = h(w_2) = 1,\ h(w_3) = 0.$

Bundan $P(x = 0; h = 0) = P(x = 0) = \frac{1}{2}$, x va h o‘zaro bog’liq bo‘lgani uchun $Ex = 0$ bo‘ladi. Tasodifiy n ta o‘zgaruvchi 2 ta bo‘linish hosil qiladi. $D = \{D_1, D_2\}$, $D_1 = \{w_1, w_2\}$,

$D_2 = \{w_3\}$. $E(x / D_i) = 0$ $i = 1,2$. Demak, $E(x / h) = 0 = Ex$.

№ 2. Tasodifiy o‘zgaruvchining D bo‘linishga nisbatan shartli dispersiyasi quyidagicha topiladi:

$$D(x / D) = E\left[(x - E(x / D))^2 / D\right]. \qquad Dx = ED(x / D) + DE(x / D)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish: Qavslarni ochamiz va soddalashtirib matematik kutilmaning qiymatini topamiz:

$$D(x / D) = E(x^2 - 2xE(x / D) + \left[E(x / D)\right]^2 / D)$$

Bundan kelib chiqadi $ED(x / D) = Ex^2 - E\left[E(E(x / D)\right]^2$.

№ 3. Istalgan $f = f(h)$ funksiya uchun shartli matematik kutilma $E(x / h)$ uchun quyidagi xossa o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating:

$$E\left[f(h)E(x / h)\right] = E\left[xf(h)\right].$$

Yechish: $f(h)$ funksiya ikki o‘lchovli bo‘lganligi sababli

$$f(h) \cdot E(x / h) = E(x \cdot f(h) / h).$$

Bu esa ikkala qismining matematik kutilmasi teng bo‘lishini ko‘rsatadi. Demak, $E\left[f(h)E(x / h)\right] = E\left[xf(h)\right]$ xossa o‘rinli.

№ 4. x va h tasodifiy miqdorlar berilgan bo‘lsin, $E(h - f(x))^2$ ning funksiyasi

$f^*(x) = E(h / x)$ bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish: Ixtiyoriy $f = f(x)$ funksiya uchun

$$E(h - f(x))^2 = E\left[(h - f^*(x)) + (f^*(x) - f(x))\right]^2 =$$

$$= E(h - f^*(x))^2 + 2E\left[(h - f^*(x))(f^*(x) - f(x))\right] + E(f^*(x) - f(x))^2.$$

Bundan

$$E(h - f(x))^2 \geq E(h - f^*(x))^2.$$

№ 5. Bizga $x_1, \ldots x_n$, o‘zaro bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar berilgan bo‘lsin va $x_1, \ldots x_n$, ($i = 1\ldots n$) bir qiymatli aniqlangan bo‘lsin. Bunda $S_T = x_1 + \ldots + x_t$ yig’indi uchun

$E(S_T / t) = t\,Ex_1,\ D(S_T / t) = t\,Dx_1$

tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish: Chunki,

$$1 = \sum_{k=1}^{n} I(t = k) \text{ va } E(x_i / t) = Ex_1,\ i = 1,\ldots,n,$$

$$E(S_t / t) = E(\sum_{k=1}^{n} I(t = k)S_k / t) = \sum_{k=1}^{n} I(t = k)E(S_k / t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} I(t = k)kEx_1 = t\,Ex_1.$$

$D(S_T / t) = t\,Dx_1$ formula ham huddi shunday isbotlangan. Bundan ko‘rinadiki,

$$ES_t = E\left[E(S_t / t)\right] = E(t \cdot Ex_1) = Et \cdot Ex_1.$$

№ 6. Ixtiyoriy x tasodifiy miqdor va D bo‘linish uchun $D \in D$ uchun $E(x / D) = Ex$ tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Yechim. Ta’rifga ko‘ra

$$E(x \mid D) = \sum_{i=1}^{k} E(x \mid D_i) I_{D_i}(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{E(xI_{D_i})}{P(D_i)} I_{D_i}(w) = ,$$
$$= \sum_{i=1}^{k} I_{D_i}(w) Ex = Ex$$

Bu yerda x va I_{D_i} miqdorlarning bog‘liqmasligi tufayli oxirgidan oldingi o‘tish to‘g‘ri (W, f, P)bo‘ladi.

№ 7. (W, f, P) ba’zi bir diskret ehtimollik fazosi va $x = x(w)$ tasodifiy o‘zgaruvchisi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ehtimollik bilan $P\{x = x_i\} = p_i$. Tasodifiy miqdorning entropiyasi x

(yoki kuzatishlarda x ni birlashtirgan tajriba e_x)- bu miqdor

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i$$

Agar (x, h)tasodifiy miqdorlar juftligi va $P\{x = x_i, h = y_i\}, i = 1,\ldots,k; j = 1,\ldots,l$ bo‘lsa $H(x, h)$ bu juflik quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$H(x, h) = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} \log_2 p_{ij}.$$

Agar ξ *va* η bog‘liqsiz bo‘lsa , u holda $H(\xi,\eta) = H(\xi) + H(\eta)$ ekanligini ko‘rsating.

Yechim. Belgilanish qulay bo‘lishi uchun $p_i := P\{\xi = x_i\}, i = 1,\ldots,k; q_j := P\{\eta = y_j\} j = 1,\ldots,l$ ni qo‘yamiz.

Bog‘liqsizligi tufayli

$$H(\xi,\eta) = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} p_{ij}\log_2 p_{ij} = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} p_i q_j(\log_2 p_i + \log_2 q_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i \sum_{j=1}^{l} q_j - \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 q_j = H(\xi) + H(\eta)$$

№ 8. (ξ,η) tasodifiy miqdorlar juftligi berilgan bo‘lsin va $(x_i, y_i), i = 1,\ldots,k; j = 1,\ldots,l$ qiymatlarni qabul qilsin.

η tasodifiy miqdorning ξ ga nisbatan shartli entropiyasi

$$H_{x_i}(\eta) = -\sum_{j=1}^{l} P\{\eta = y_i \mid \xi = x_i\}\log_2 P\{\eta = y_i \mid \xi = x_i\}.$$

η tasodifiy miqdorning ξ ga nisbatan o‘rtacha shartli entropiyasi

$$H_{\xi}(\eta) = \sum_{i=1}^{k} P\{\xi = x_i\} H_{x_i}(\eta)$$

formula bilan aniqlanadi.

a) $H(\xi,\eta) = H(\xi) + H(\eta)$

b) Agar ξ *va* η bog‘liqsiz bo‘lsa , u holda $H(\xi,\eta) = H(\xi) + H(\eta)$ ekanligini ko‘rsating;

c) $0 \le H_{\xi}(\xi) \le H(\eta)$.

Yechim: a)

$$H_{\xi}(\eta) = \sum_{i=1}^{k} P\{\xi = x_i\} H_{x_i}(\eta) = -\sum_{i=1}^{k} P\{\xi = x_i\}\sum_{j=1}^{l} P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\} \times (\log_2 P\{\eta = y_i \mid \xi = x_i\} - \log_2 P\{\xi = x_i\}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} p_{ij}\log_2 p_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\log_2 p_i + \sum_{j=1}^{l} p_j = H(\xi,\eta) - H(\xi)$$

b) 1.8.7 misolda isbotlangan.

c) bu masalaning a) bandi asosida $H(\xi,\eta) \le H(\xi) + H(\eta)$ ekanligini isbotlash kifoya. $\sum_i p_{ij} = q_j$ bo‘lganligi sababli va $\sum_j p_{ij} = q_j$ quyidagi o‘zgarishlar o‘rinli:

$$H(x,h) - H(x) - H(h) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i + \sum_{j=1}^{l} q_j \log_2 q_j - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} \log_2 p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} (\log_2 p_i + \log_2 q_j - \log_2 p_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} \log_2 \frac{p_i q_j}{p_{ij}}$$

$\ln x \le x - 1$ ma'lum bo'lgan tengsizlik tufayli , har qanday musbat x uchun to'g'ri, biz oxirgi qiymatdan oshmasligini aniqlaymiz

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} (\frac{p_i q_j}{p_{ij}} - 1) = c \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (p_i q_j - p_{ij}) = 0.$$

Bu yerda $c = \log_2 e$.

9. (x,h) tasodifiy miqdorlar juftligi berilgan bo'lsin .

$$I_e(h) = H(h) - H_e(h)$$

ga x dagi h ga tegishli ma'lumotlar miqdori bilan aniqlanadi. Terminalogiya $H(h) - H_e(h)$ farqi x tasodifiy miqdorning $H(h)$ qiymatining noaniqligini h kamaytirishi mumkinligini ko'rsatishi bilan aniqlanadi.

Ko'rsatish kerak,

a) $I_e(h) = I_e(x) \geq 0$

b) $I_e(h) = H(h)$ agar h x ning qandaydir funksiyasi bo'lsa,

c) Agar x, h va V tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$I_{(x,V)}(h) = H(h) - H_{(x,V)}(h) \geq I_{(x)}(h)$$

ya'ni (x,V) h ga tegishli tasodifiy o'zgaruvchidan kam bo'lmagan qiymatni o'z ichiga oladi.

Yechim. a) bandni isboti 1.8.8 masaladan kelib chiqadi.

b) bizda

$$I_e(h) = H(h) \Rightarrow H_e(h) = 0 \Rightarrow H_{x_i}(h) = 0, i = 1,\ldots,k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{h = y_j \mid x = x_i\} = 0$$

Va 1 uchun ixtiyoriy $i = 1,..,k; j = 1,\ldots,l$ yoki $\{x = x_i\} \subset \{h = y_j\}$ yoki $\{x = x_i\} \cap \{h = y_j\} = D$ ixtiyoriy $i = 1,..,k; j = 1,\ldots,l$ uchun. Oxirgidan shuni anglash mumkinki, x tasodifiy o‘zgaruvchisi h ga qaraganda nozikroq bo‘linishni tashkil qiladi. Bu $h = f(x)$ deganidir.

9. (x, h) - juftlik tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Hajmi

$$I_x(h) = H(h) - H_x(h),$$

x o‘z ichiga olgan h ga oid ma’lumotlar miqdori deyiladi. Terminlar quyidagilar bilan ifodalanadi: h kattalik va $H(h)$ noaniqlik orasidagi bu farq $H(h) - H_x(h)$tasodifiy miqdorni bilish qay darajada kamayishi mumkinligini ko‘rsatadi.

Buni ko‘rsating:

a) $I_x(h) = I_h(x) \geq 0$;

b) $I_x(h) = H(h)$ bo‘ladi, agar h faqat x ning qandaydir funksiyasi bo‘lsa;

c) Agar x, h va z - tasodifiy miqdorlar bo‘lib,

$$I_{(x,z)}(h) = H(h) - H_{(x,z)}(h) \geq I_x(h)$$

bular (x, z)-juftlikka nisbatan h kam bo‘lmagan ma’lumotlarni o‘z ichiga oladi, bu yerda x faqat tasodifiy miqdorni bildiradi.

Yechim: a) yechimi 1.8.8(a) muammosidan kelib chiqadi.

b) Bizda

$$I_x(h) = H(h) \text{ € } H_x(h) = 0 \text{ € } H_{x_i}(h) = 0,\ i = 1,\ldots,k$$
$$\text{€ } P\{h = y_j \mid x = x_i\} = 0$$

yoki 1 uchun har qanday $i = 1,\ldots,k,\ j = 1,\ldots,l$ € yoki $\{x = x_i\} \text{ Õ } \{h = y_j\}$, yoki $\{x = x_i\} \text{ « } \{h = y_j\} = \Delta$ uchun $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,l$ bo‘ladi. Ikkinchi tasodifiy miqdor x, h ga qaraganda kichikroq miqdor bo‘lishini anglatadi, ya’ni bu $h = f(x)$ bo‘ladi.

c) Bizda

$$I_{(x,z)}(h) \geq I_x(h) \text{ € } H_{(x,z)}(h) \text{ £ } H_{(x)}(h)$$

tengsizlik bor. Agar $i = 1,\ldots,k$ bo‘lsa, oxirgi tengsizlik bajariladi:

$$\mathop{\text{Å}}_{r=1}^{m} P\{x = x_i;\ z = z_r\} H_{x_i, z_r}(h) \text{ £ } P\{x = x_i\} H_{x_i}(h),$$

Bu yerda

$$H_{x_i,z_r}(\eta) = -\sum_{j=1}^{l} P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i, \zeta = z_r\} \log_2 P\{\eta = y_j \mid \xi = x_i, \zeta = z_r\},$$

bo‘ladi.

Bu ham 1.8.8(c) masala kabi isbotlanadi.

10. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ lar bilan berilgan, har bir ξ_n uchun $P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = 1 - p$ Bernulli taqsimoti berilgan bo‘lsin. Bunda $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Har bir $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_i = 0$ va $x \leq k$ bo‘lganda quyidagilarni o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating:

a) $P(\xi_1 = x_1, \ldots \xi_n = x_n \mid S_n = k) = \dfrac{I_{\{x\}}(k)}{C_n^k}$,

b) $P(S_n = x \mid S_{n+m} = k) = \dfrac{C_n^k C_m^{k-x}}{C_{n+m}^k}$.

Yechim: a) holatda

$$P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n \mid S_n = k) = \frac{P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n, S_n = k)}{P(S_n = k)} =$$

$$= \frac{I_x(k) p^k q^{n-k}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{I_{\{x\}}(k)}{C_n^x}$$

bo‘ladi.

b) holda ham xuddi shunday

$$P(S_n = x \mid S_{n+m} = k) = \frac{P(S_n = x, S_{n+m} - S_n = k - x)}{P(S_{n+m} = k)} =$$

$$\frac{P(S_n = x) P(S_{n+m} - S_n = k - x)}{P(S_{n+m} = k)} = \frac{C_n^x p^x q^{n-x} \cdot C_m^{k-x} p^{k-x} q^{m-k+x}}{C_{n+m}^k p^k q^{n+m-k}} = \frac{C_n^x C_m^{k-x}}{C_{n+m}^k}$$

bo‘ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Форманов Ш. Қ. Эҳтимоллар назарияси, Тошкент, “Университет”, 2014 й.
2. Абдушукуров А.А., Азларов Т.А., Джамирзаев А.А. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами», Тошкент, «Университет», 2003 й.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. URSS, Москва, 2009.
4. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
5. Г.И.Ивченко, Ю.И. Медведов, А.В. Чистяков, З*адачи с решениями по математической статистике.* Москва, «Дрофа», 2007.
6. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL Москва, «Форум», 2008.
7. В. Б. ЯКОВЛЕВ. Статистика. расчеты в MICROSOFT EXCEL Москва «Колосс» 2005.